PAP 2.2
Versuch 243: "Thermisches Rauschen"

Jonas Schweer

12. Februar 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**
- 1.1 Ziel des Versuchs . . . 2
- 1.2 Versuchsaufbau . . . 2
  - 1.2.1 Versuchsaufbau 1 . . . 2
  - 1.2.2 Versuchsaufbau 2 . . . 3
- 1.3 Physikalische Grundlagen . . . 3
  - 1.3.1 Brown'sche Bewegnung . . . 3
  - 1.3.2 Entstehung von thermischem Rauschen und Nyquist-Beziehung 3
  - 1.3.3 Bandbreite und Bandpassfilter . . . 4
  - 1.3.4 Bestimmung der Boltzmannkonstante . . . 4
  - 1.3.5 Güte eines Fits . . . 5

2 Messprotokoll **5**

3 Auswertung **8**
- 3.1 Vorversuch . . . 8
  - 3.1.1 Auswertung Frequenzgang . . . 9
  - 3.1.2 Auswertung Rauschen . . . 11

4 Zusammenfassung und Diskussion **13**

1 Einleitung

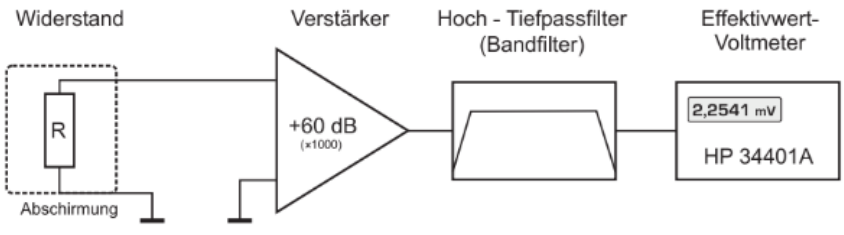
1.1 Ziel des Versuchs

In diesem Versuch wollen wir für 6 verschiedene Widerstände, sowie für unseren verwendeten Verstärker das Rauschen bei Zimmertemperatur analysieren. Anschließend betrachten wir den Frequenzgang unseres Bandfilters. Aus diesen Messungen wollen wir dann schließlich die Boltzmannkonstante berechnen.

1.2 Versuchsaufbau

1.2.1 Versuchsaufbau 1

Sowohl für die qualitative Untersuchung des Rauschens, als auch für die quantitative Messung der Rauschspannung nutzen wir einen Schaltkreis der folgenden Form:



[1]

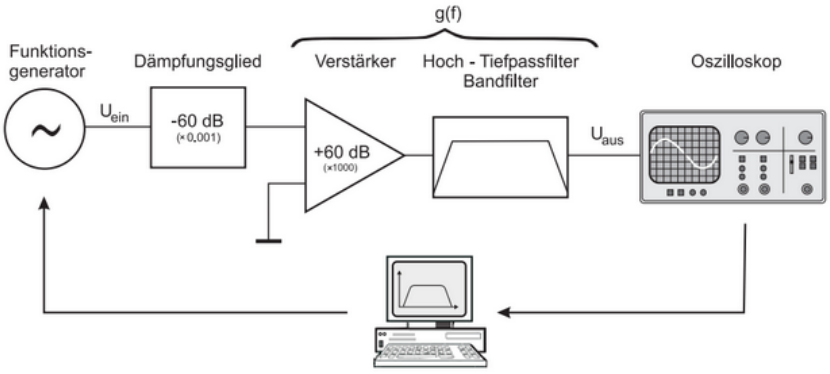
Abbildung 1: Erster Schaltkreis

Die Widerstände in der Abschirmung lassen sich extern auf verschiedene Werte anpassen. Die Spannung, die nun an den Verstärker weitergegeben wird, wird um das tausendfache Verstärkt und durch einen Bandfilter geschickt. Bei dem qualitativen Vorversuch ist es wichtig zu beachten, dass wir die Spannung zwar auch mit Bandpassfilter anschauen, ihn jedoch auch deaktivieren, um zu schauen, welche Auswirkungen das hat. Mit dem Effektivwert-Voltmeter und einem beistehenden Computer können wir nun die effektive Rauschspannung des eingeschalteten Widerstands sowie die des Bandfilters messen.

[1] Grafik übernommen aus 'Physikalisches Praktikum PAP2.2 für Studierende der Physik B.Sc.', 08.10.2024, Jens Wagner

1.2.2 Versuchsaufbau 2

Nun wechseln wir den Versuchsaufbau mit einem solchen Schaltkreis aus:



[2]

Abbildung 2: Zweiter Schaltkreis

Mit Hilfe des Funktionsgenerators senden wir eine Sinuswelle auf das Dämpfungsglied. Der Funktionsgenerator lässt sich mithilfe des Computers steuern. Das Dämpfungsglied schwächt das Signal um das Tausendfache ab, sodass der nachfolgende Verstärker nicht übersteuert und in Sättigung geht. Anschließend wird das Signal in einen Bandfilter gegeben, dessen Ausgangsspannung an einem Oszilloskop bzw. danach dem Rechner ausgewertet wird. Das Programm, mit welchem wir den Funktionsgenerator steuern, stellt den Generator so ein, dass er Frequenzen von 100Hz bis 1MHz an den Bandpass schickt.

1.3 Physikalische Grundlagen

1.3.1 Brown'sche Bewegnung

Die Brown'sche Bewegung bezeichnet das Phänomen, dass die kinetische Energie der Teilchen eines Stoffes in direktem Zusammenhang mit der Temperatur dieses Stoffes stehen. So stehen die Teilchen nie still, sie bewegen sich ständig. Ausnahme hiervon ist der absolute Nullpunkt, bei diesem bewegen sich die Teilchen nicht mehr, da sie keine kinetische Energie mehr haben ($T = 0\text{K}$). Die Brown'sche Bewegung ist der zentrale Grund, warum es zum dem in diesem Versuch untersuchten thermischen Rauschen kommt.

1.3.2 Entstehung von thermischem Rauschen und Nyquist-Beziehung

Wie bereits erwähnt, stehen die Teilchen in einem Stoff nie ganz still. Das gilt auch für die elektrischen Bauteile, die wir verwenden. So kommt es durch diese Bewegungen zum Beispiel innerhalb des Widerstands immer Wieder zu kleinen, aber dennoch messbaren Potentialunterschieden welche man Rauschspannung nennt. Solange jedoch keine äußere Spannung angelegt ist, bevorzugt diese jedoch keine Richtung, da die

[2] Grafik übernommen aus 'Physikalisches Praktikum PAP2.2 für Studierende der Physik B.Sc.', 08.10.2024, Jens Wagner

Brown'sche Bewegung in alle Richtungen gleichermaßen funktioniert. So wird die gemessene Rauschspannung im Mittel trotzdem immer Null werden. Um sie dennoch quantitativ zu untersuchen, messen wir die effektive Spannung, welche durch die Wurzel des quadratischen Mittels gegeben ist:

$$U_{eff} = \sqrt{\langle U^2 \rangle} \tag{1}$$

Die Nyquist-Beziehung gibt nun an, wie dieser Effektivwert mit dem Widerstand R, der Temperatur T und der Bandbreite Δf der Messgeräte zusammenhängt:

$$U_{eff} = 2\sqrt{kTR\Delta f} \tag{2}$$

Dabei ist k die Boltzmann-Konstante.

1.3.3 Bandbreite und Bandpassfilter

Die Bandbreite unserer Messgeräte sind nicht besonders scharf. Vor allem der Verstärker fängt bei hohen Frequenzen an, nicht mehr die vollständige Verstärkung zu liefern, sie flacht ab. Der Frequenzgang $g(f)$ ist in diesem Fall nichts anderes als eine Funktion, die die Verstärkung bei einer Frequenz zurückgibt. Dieser berechnet durch:

$$g(f) = \left| \sqrt{\frac{\langle U_{aus}^2 \rangle}{\langle U_{ein}^2 \rangle}} \right| \tag{3}$$

bzw. wenn eine Dämpfung D vorangeschaltet wurde:

$$g(f) = \frac{1}{D} \left| \sqrt{\frac{\langle U_{aus}^2 \rangle}{\langle U_{ein}^2 \rangle}} \right| \tag{4}$$

Nun wollen wir die Bandbreite scharf begrenzen, indem wir einen Bandpass hinzuschalten. So unterdrücken wir die Frequenzen, bei denen die Verstärkung nicht mehr konstant ist.

1.3.4 Bestimmung der Boltzmannkonstante

Da wir wissen, dass die Rauschspannung U_r als Eingangsspannung des Aufbaus dient, und die Ausgangsspannung am Ende des Bandfilters abgegriffen wird, folgt nach Formel (2):

$$d\langle U_{aus}^2 \rangle = g(f)^2 d\langle U_r^2 \rangle = 4kTR\ g(f^2)\ df \tag{5}$$

Nun integrieren Wir dies über alle Frequenzen:

$$\langle U_{aus}^2 \rangle = 4kTR \int_0^\infty g(f^2)\ df =: 4kTRB \tag{6}$$

Wobei B das Ergebnis des Integrals beschreibt und als äquivalente Rauschbandbreite des Messsystems bezeichnet wird. Oftmals (wie auch in unserem Versuch) muss diese numerisch bestimmt werden.
Da wir jedoch wissen, dass unser Verstärker ebenfalls zu dem Rauschen beiträgt, müssen wir dessen quadratischen Effektivwert $\langle U_V^2 \rangle$ noch von der Ausgangsspannung abziehen. Nun können wir nach k umstellen und erhalten somit unsere Formel für die Boltzmannkonstante:

$$k = \frac{\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle}{4TRB} \tag{7}$$

1.3.5 Güte eines Fits

Wenn man eine Funktion an Messungen heranfittet (beispielsweise mit Python), so kann man die χ^2-Summe dieses Fits folgendermaßen bestimmen:

$$\chi^2 = \sum_i^N \left(\frac{f(x_i) - y_i}{\Delta y_i} \right)^2 \tag{8}$$

Dabei sind x_i die Parameter, welche auf der x-Achse liegen und y_i die zugehörigen Messungen. Δy_i ist die Unsicherheit der Messungen. Im Optimalfall sollte gelten $y_i = f(x_i)$. Die reduzierte χ^2-Summe kann man nun folgendermaßen berechnen:

$$\chi^2_{red} = \frac{\chi^2}{d} \tag{9}$$

wobei d die Anzahl der Freiheitsgrade beschreibt, die man erhält, wenn man von der Anzahl der Gesamtmessungen die Anzahl der Parameter, die man der Funktion gegeben hat, abzieht. Wenn $\chi^2_{red} \approx 1$, so ist der Fit gelungen.

2 Messprotokoll

Messprotokoll 243: Thermisches Rauschen

07.01.25
Harish Mahendran
Jonas Schwer

Messgeräte:

- Batterienetzteil
- Zimmerthermometer
- Verschiedene ohmsche Widerstände in einem gemeinsamen Gehäuse montiert
- Rauscharmer Verstärker mit 1000-facher Verstärkung (60 dB) und zuschaltbarem Bandpassfilter
- Dämpfungsglied 1/1000-fach (-60dB)
- Beheizbarer Widerstand 4 kΩ bei 0°C (Pt4000-Widerstand)
- Heizungsnetzteil mit integrierter Regelelektronik für den beheizbaren Widerstand
- Oszilloskop mit Spektrumanalysator
- Funktionsgenerator
- Multimeter Agilent HP34401A
- PC

Aufgabe 1: Qualitative Untersuchung

Wir stecken den umschaltbaren Widerstand mit kleinstem eingestellten Widerstand auf den Verstärkereingang. Einmal schauen wir uns die Frequenzen sowohl mit und ohne Bandpassfilter an und machen ein Bildschirmfoto.

Aufgabe 2: Messung der Rauschspannung bei Widerständen

Wir stecken den Widerstand erneut direkt an den Verstärker mit Bandpass und nehmen für 6 verschiedene Widerstände (5kΩ, 10kΩ, 15kΩ, 20kΩ, 25kΩ) den Effektivwert der Spannung auf. Danach nehmen wir ihn noch bei Erdung (0Ω) auf. Wir machen Fotos.

R [kΩ]	0	5	10	15	20	25	30
$\bar{V}_{eff}$ [mV]	1,3688	2,4088	3,1195	3,7003	4,2006	4,6674	5,084
std [mV]	0,00663	0,0091	0,013	0,0142	0,017	0,0164	0,0187

Tabelle 1: Mittlere effektive Spannung pro Widerstand

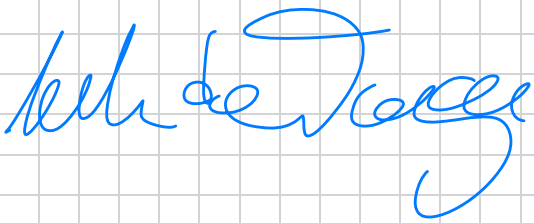
Aufgabe 3: Messung des Frequenzgang und des Bandfilters

Wir bestimmen den Frequenzgang des Bandfilters und des Verstärkers mit dem Frequenzgenerator. Am Circuit Analyser sind folgende Einstellungen eingestellt:

- Vertical Scale: 5 dB/div
- V-Range: 0,3 V
- Frequency Range: 1 MHz
- Frequency Start: 100 Hz
- Stellen Sie für die Frequenzschritte 20% ein (Menupunkt `Options` → `Frequency Step Size`)
- Wählen Sie aus dem Menupunkt `Options`, die Option `Automatic Voltage Scale` und folgen Sie den Hinweisen des erscheinenden Fensters.

Abschwächung: $D = (0{,}001 \pm 9{,}2\%)$

Anschließend speichern wir die Daten ab.



3 Auswertung

3.1 Vorversuch

Folgende Bilder haben wir beim Vorversuch aufgenommen:

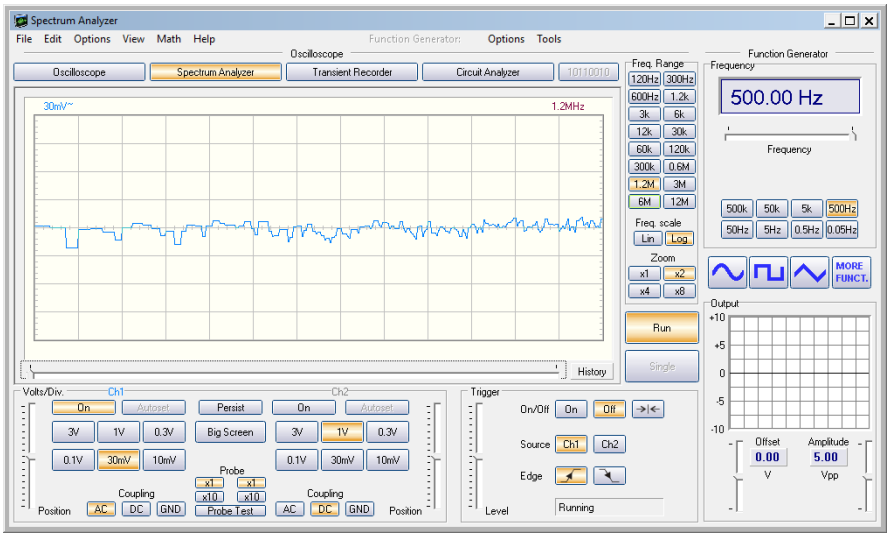


Abbildung 3: Kein Bandpass und niedrige Frequenzen

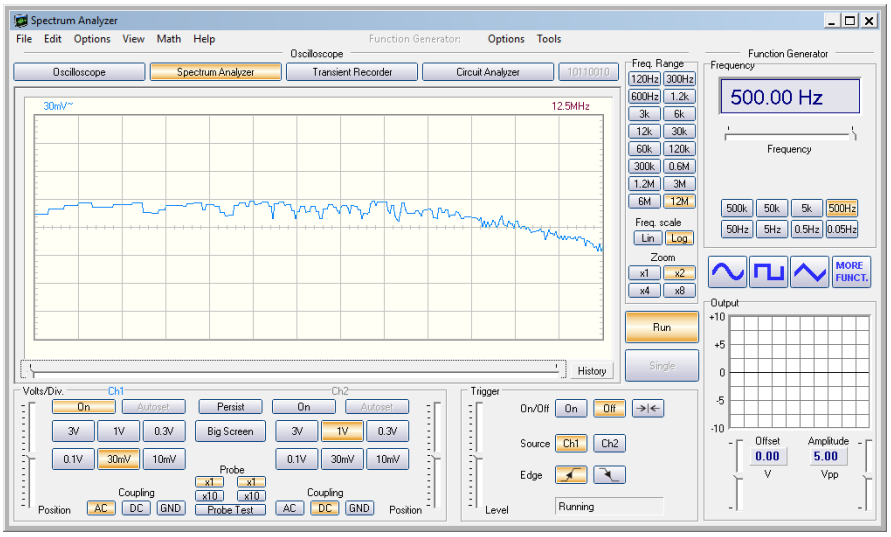


Abbildung 4: Kein Bandpass und hohe Frequenzen

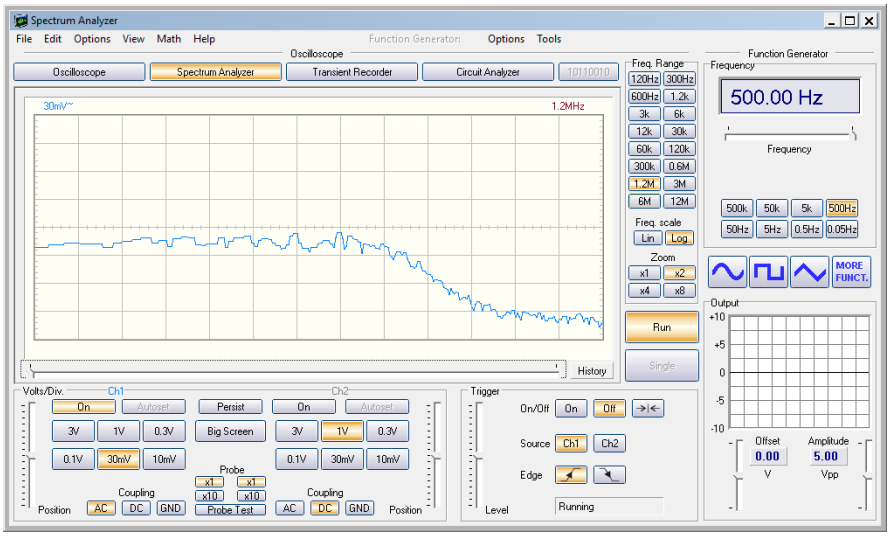


Abbildung 5: Mit Bandpass

Wir sehen also, dass der Frequenzgang bei den niedrigen Frequenzen nahezu konstant ist. Das liegt daran, dass das Rauschen sogenanntes "weißes Rauschenïst, da es alle Frequenzen gleichermaßen beinhaltet (→ Analogie: weißes Licht beinhaltet alle Wellenlängen). Auch erkennen wir, dass der Frequenzgang trotzdem bei sehr hohen Frequenzen beginnt abzuflachen. Wie bereits in den physikalischen Grundlagen erläutert liegt es an den Limitationen unseres Verstärkers. Dieser kommt bei hohen Frequenzen nicht auf die selbe Verstärkung wie er bei niedrigen geliefert hat. Somit kommen weniger der hohen Frequenzen durch, obwohl sie beim eintreten noch gleichstark vertreten waren. Schalten wir nun den Bandpass hinzu, sehen wir, dass der Frequenzgang schon viel früher absinkt, allerdings auch viel schneller und somit etwas schärfer.

3.1.1 Auswertung Frequenzgang

Wir wollen nun zuerst die Messung des Frequenzganges auswerten und so das benötigte Integral bereits numerisch auswerten. Dafür laden wir unsere Messdaten in ein Jupyter Notebook. Wir nutzen Formel (4), wobei die geladenen Daten jeweils schon der Wurzel aus dem Mittelwert entspricht. Damit können wir nun den Frequenzgang plotten. Jedoch müssen wir noch unbrauchbare Messwerte am Anfang und Ende des Plots für die weitere Auswertung abschneiden.

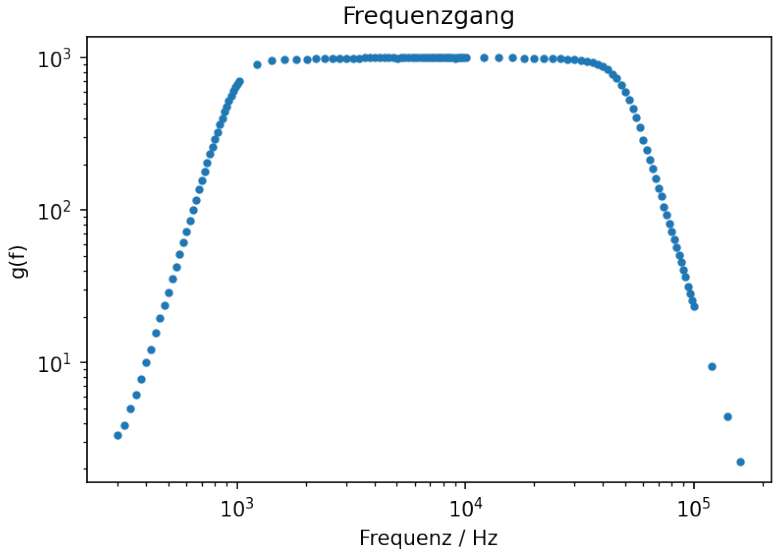


Abbildung 6: Plot des Frequenzgangs ohne überschüssige Messungen

Anschließend fitten wir eine Funktion der folgenden Form hindurch:

$$g(f) = \frac{V}{\sqrt{1 + 1/(f/\Omega_1)^{2n_1}}\sqrt{1 + (f/\Omega_2)^{2n_2}}} \tag{10}$$

V wird im Endeffekt die Verstärkung sein, $\Omega_{1,2}$ die Grenzfrequenzen des Bandpassfilters und $n_{1,2}$ die Filterordnungen des Hoch- und Tiefpassfilters im Bandpass. Wir erhalten als Fitparameter:

$\boxed{V = 994.7 \pm 1.1}$
$\boxed{\Omega_1 = (1016.4 \pm 2.1)\text{Hz}}$
$\boxed{\Omega_2 = (46710 \pm 100)\text{Hz}}$
$\boxed{n_1 = 4.90 \pm 0.05}$
$\boxed{n_2 = 4.69 \pm 0.04}$

Die Funktion sieht dann so aus:

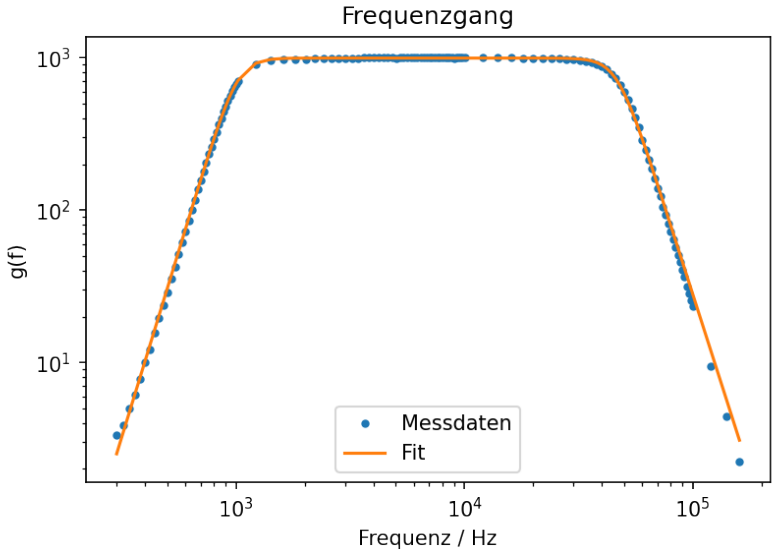


Abbildung 7: Gefittete Funktion

Werten wir nun das Integral dieser Funktion im Quadrat vom ersten bis zum letzten Messwert aus, so erhalten wir für den Parameter B:

$$\boxed{B = (4.61 \pm 0.09) \cdot 10^{10}}$$

Den Fehler haben wir hierbei als ca. 2% angenommen.

3.1.2 Auswertung Rauschen

Nun wollen wir die Messreihe des ersten Hauptversuches auswerten. Dafür nutzen wir unsere Ergebnisse aus Tabelle 1 des Messprotokolls. Wir nehmen an, dass die Widerstände einen Fehler von 0.5% aufweisen. Wir wollen nun die Differenz $\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle =: D$ gegenüber dem eingeschalteten Widerstand plotten. Als U_V nehmen wir unsere Messung bei 0. Der Fehler berechnet sich dann jeweils durch:

$$\Delta D = \sqrt{(2U_{aus}\Delta U_{aus})^2 + (2U_V \Delta U_V)^2} \tag{11}$$

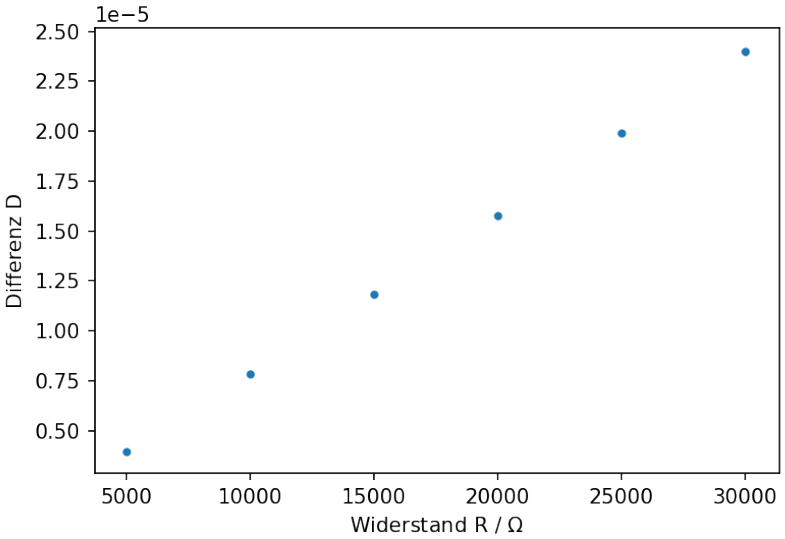


Abbildung 8: Differenz gegen den Widerstand geplottet

Durch diese Punkte wollen wir nun einen linearen Fit legen um so die Steigung herauszufinden. Der Fit sieht folgendermaßen aus:

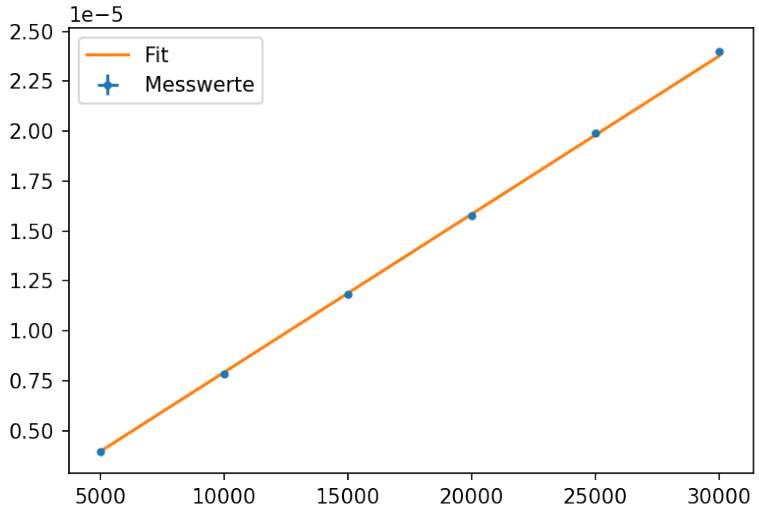


Abbildung 9: Linearer Fit durch die Messungen

Die Steigung gibt Python aus als:

$$\boxed{c = (7.919 \pm 0.024)\frac{\mathrm{V}^2}{\Omega}}$$

Mit all diesen Ergebnissen, können wir durch Formel (7) die Boltzmannkonstante bestimmen. Dabei ersetzt unsere Steigung c den Bruch $\frac{\langle U_{aus}^2 \rangle - \langle U_V^2 \rangle}{R}$. Den Fehler spalten wir

diesmal auf in systematische Fehler, welche durch die Integration entstanden sind und so berechnet werden:

$$\Delta_{sys}k = k \cdot \frac{\Delta B}{B} \tag{12}$$

und in statistische Fehler, welche durch den Fehler der Messungen zustande gekommen sind. Diese berechnen sich durch:

$$\Delta_{stat}k = \sqrt{\left(\frac{\Delta c}{4TB}\right)^2 + \left(\frac{c}{4BT^2}\Delta T\right)^2} \tag{13}$$

Da wir leider keine Temperatur im Messprotokoll notiert haben, nutzen wir als Temperatur einen Wert von $T = (20 \pm 1)°\mathrm{C}$. Dieser Wert scheint nicht abwegig, da es ein ziemlich durchschnittlicher Tag war, an dem wir den Versuch durchgeführt haben. Wir erhalten als Endergebnis also:

$$\boxed{k = (1.4660 \pm_{sys} 0.029 \pm_{stat} 0.007) \cdot 10^{-23} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}}$$

4 Zusammenfassung und Diskussion

Zusammenfassend haben wir zuerst eine qualitative Untersuchung des thermischen Rauschens durchgeführt. Hierbei haben wir uns das Verhalten der Spannung bei verschiedenen Frequenzen angeschaut und uns klar gemacht, weshalb ein Bandpassfilter von nützen ist. Anschließend haben wir uns den Effektivwert der Rauschspannung einmal ohne Widerstand und danach mit verschiedenen zugeschalteten Widerständen angeschaut. Wir konnten so ein Verhältnis zwischen thermischem Rauschen und dem Widerstand errechnen. Wir erhielten für dieses Verhältnis:

$$\boxed{c = (7.919 \pm 0.024) \frac{\mathrm{V}^2}{\Omega}}$$

Wenn man die χ^2-Summe und χ^2_{red}-Summe dieses Fits, mit der wir die Steigung bestimmt haben, berechnet, kommt man auf:

$$\boxed{\chi^2 = 3.32}$$
$$\boxed{\chi^2_{red} = 0.66}$$

Die Fitwahrscheinlichkeit lautet:

$$\boxed{p_{fit} = 65\%}$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist recht gut, da sie nicht zu niedrig ist und man davon ausgehen müsste, dass der Fit nicht passt, sie aber auch nicht so groß ist, dass man überlegen müsste, ob die Messungen nicht eventuell *zu gut* sind. Anschließend haben wir den

Frequenzgang des Systems aufgenommen und mittels Python die Funktion $g(f)$ an die Messung herangefittet. Wir erhielten als Messparameter:

$$\boxed{V = 994.7 \pm 1.1}$$
$$\boxed{\Omega_1 = (1016.4 \pm 2.1)\text{Hz}}$$
$$\boxed{\Omega_2 = (46710 \pm 100)\text{Hz}}$$
$$\boxed{n_1 = 4.90 \pm 0.05}$$
$$\boxed{n_2 = 4.69 \pm 0.04}$$

Diese Funktion konnten wir nun numerisch Integrieren um so den Parameter B der Nyquist-Beziehung zu berechnen. Der Wert hierfür lautete:

$$\boxed{B = (4.61 \pm 0.09) \cdot 10^{10}}$$

Mittels dieser Ergebnisse haben wir die Boltzmannkonstante bestimmen können. Diese ergab sich nach unseren Messungen zu:

$$\boxed{k = (1.4660 \pm_{sys} 0.029 \pm_{stat} 0.007) \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}}$$

Vergleichen wir diesen Wert nun mit dem Literaturwert von $k = 1.380649 \cdot 10^{-23}$ (Fehlerlos, Quelle: Wikipedia) so erhalten wir eine Abweichung von:

$$\boxed{\sigma = 2.37}$$

Dieser Wert deutet zwar nicht auf eine signifikante Abweichung hin, jedoch ist er trotzdem groß genug um sich über mögliche Fehlerquellen Gedanken zu machen. Die offensichtlichste Fehlerquelle ist wohl das schätzen der Temperatur. Dadurch, dass wir eigentlich nicht wissen, wie warm es tatsächlich war, kann das natürlich dazu führen, dass wir einen falschen Wert verwendet haben. Auch kann es sein, dass unser Fit für den Frequenzgang nicht optimal gewählt ist. Man erkennt auf dem Plot, dass die Werte gegen die Grenzen des Plots etwas abweichen im Vergleich zum Fit. Trotzdem sollte es sinnvoll sein, diese Messwerte mitzuberücksichtigen, da der Frequenzgang nicht zu sehr abgeschnitten werden sollte. Allerdings ist das, gepaart mit den systematischen Fehlern, die beim Messen und numerisch Integrieren auftauchen, bestimmt nicht ganz unbeteiligt an der Abweichung. Beim Durchführen selbst ist uns kein grober Fehler aufgefallen, weshalb wir einen solchen Fehler eher ausschließen würden.
Alles in allem ist eine Abweichung von $\sigma = 2.37$ jedoch auch keine Abweichung, bei der alle Alarmglocken klingeln sollten. Es kann auch plausibel auf statistische Fehler zurückzuführen sein.
Bei einer erneuten Versuchsdurchführung würde ich vor allem darauf achten, dass wir alle nötigen Daten aufschreiben, sodass wir die Temperatur nicht raten müssen :) Außerdem wäre das Durchführen von mehreren Messreihen sicherlich auch von nützen, jedoch ist das ja eigentlich immer so. Trotzdem denke ich, dass das bestimmen der Boltzmannkonstante ein Erfolg war und das erhaltene Ergebnis gut geworden ist.

Versuch_243_Thermisches_Rauschen

February 12, 2025

[1]:
```
#imports
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.optimize import curve_fit
import scipy.integrate as integrate
from scipy.stats import chi2
import scipy.constants as c
```

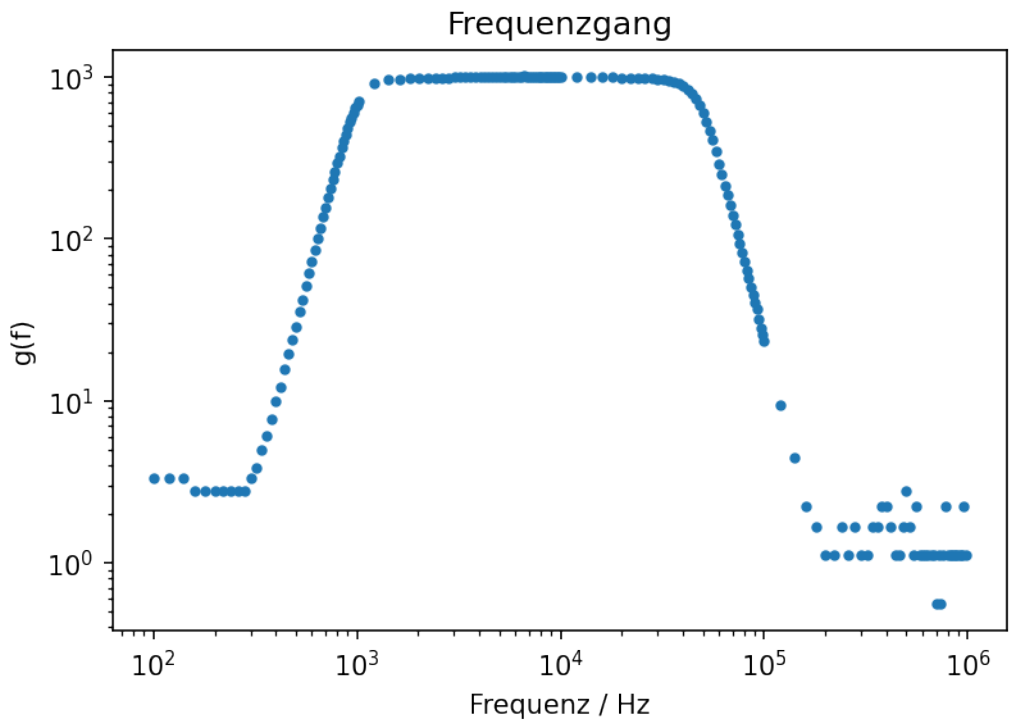
Letzte Aufgabe Auswertung

[2]:
```
#die gleich zu fittenden funktionen
def fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return V/(np.sqrt(1+1/(f/W1)**(2*n1))*np.sqrt(1+(f/W2)**(2*n2)))
def fit_func_square(f,V,W1,W2,n1,n2):
    return fit_func(f,V,W1,W2,n1,n2)**2
def linear(x,c):
    return c*x
```

[3]:
```
f, U_aus = np.loadtxt('Messwerte/Rauschen.txt', skiprows=1, usecols=(0,1),␣
 ↪unpack=True)
```

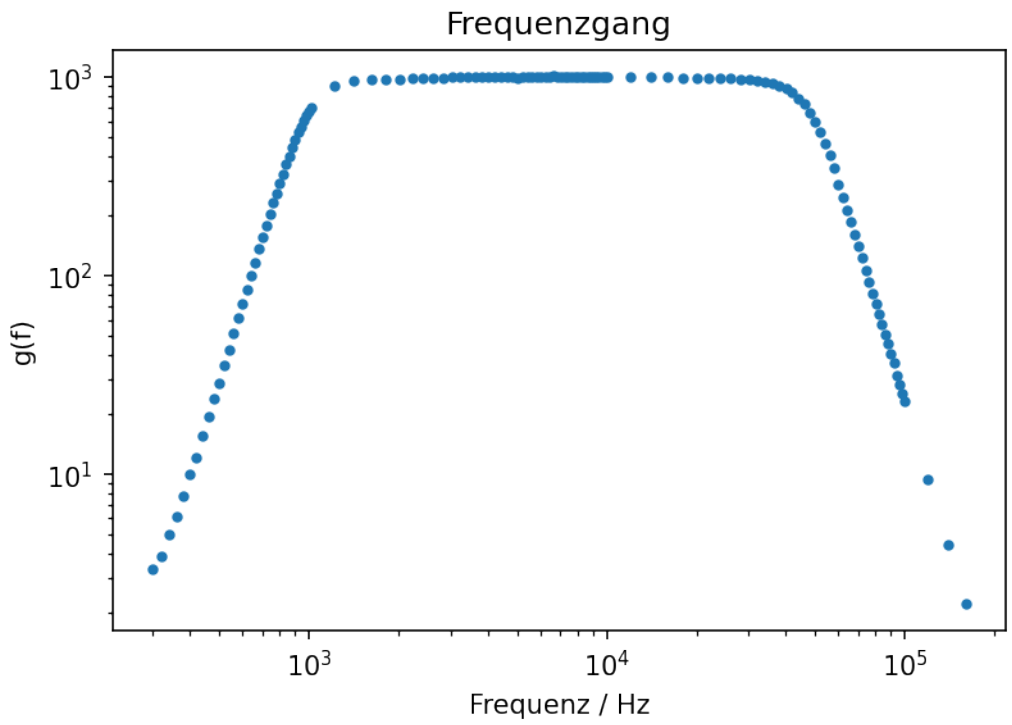
[4]:
```
#Verwendete Größen
D=1e-3
fehler_D = D*0.002
U_ein=1.8 #haben wir nicht aufgeschrieben, aber die messdaten des frequenzgangs␣
 ↪lassen darauf schließen
g=U_aus/(U_ein * D)
```

[5]:
```
#plot
plt.figure(dpi = 150)
plt.loglog(f,g, linestyle='None', marker='.')
plt.xlabel('Frequenz / Hz')
plt.ylabel('g(f)')
plt.title('Frequenzgang')
plt.savefig('Rauschen/Plot1.png')
```



[6]:
```
a = 10 #wie viele nicht berücksichtigte werte am anfang
b = 41 #wie viele nicht berücksichtigte werte am ende
```

[7]:
```
#neuer plot mit angepassten Grenzen
plt.figure(dpi = 150)
plt.loglog(f[a:-b],g[a:-b], linestyle='None', marker='.')
plt.xlabel('Frequenz / Hz')
plt.ylabel('g(f)')
plt.title('Frequenzgang')
plt.savefig('Rauschen/Plot2.png')
```

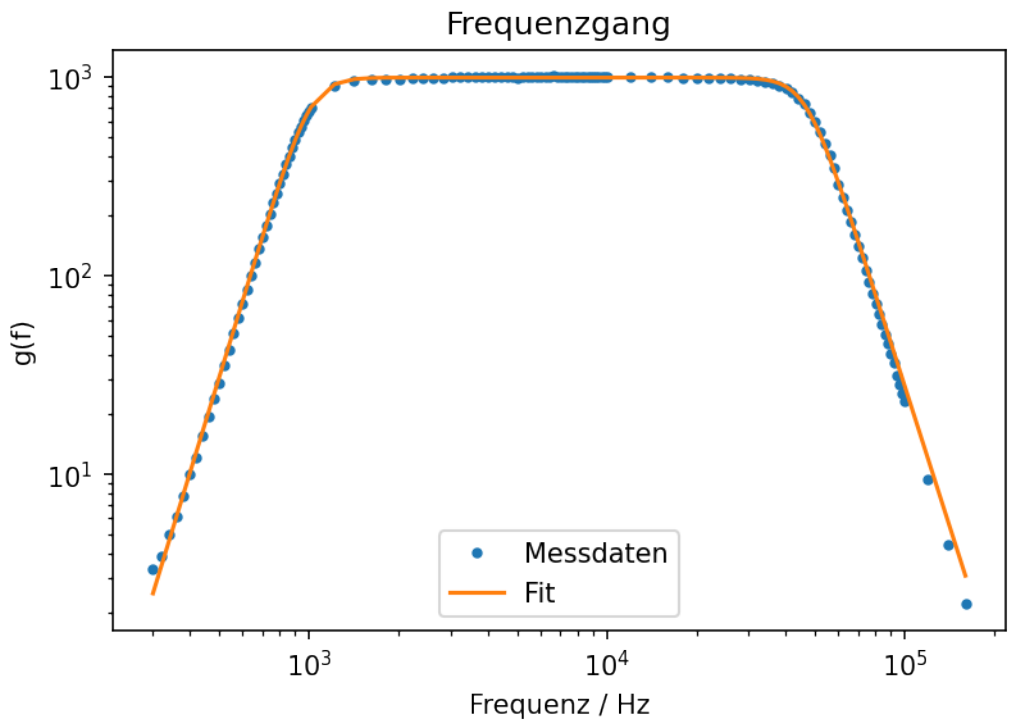


[8]:
```
p0 = [1000 , 1000 , 50000 , 5 , 5] #startparameter
popt1, pcov1 = curve_fit(fit_func, f[a:-b], g[a:-b] ,p0) #fit der kurve
```

[9]:
```
params = np.array(['V','W1','W2','n1','n2']) #um besser zu printen
#printe parameter
for i in range(len(popt1)):
    print(f"{params[i]} = {popt1[i]}, Standardfehler = {np.sqrt(pcov1[i][i])}")
```

```
V = 994.6652664463091, Standardfehler = 1.1406847963373468
W1 = 1016.3999524774275, Standardfehler = 2.0773743744060926
W2 = 46710.495859765004, Standardfehler = 97.37468381362909
n1 = 4.900962824382617, Standardfehler = 0.05334961527098288
n2 = 4.6897948876240445, Standardfehler = 0.04455948425030078
```

[10]:
```
#einzeichnen der funktion
plt.figure(dpi = 150)
plt.loglog(f[a:-b],g[a:-b], linestyle='None', marker='.', label='Messdaten')
plt.loglog(f[a:-b], fit_func(f[a:-b], *popt1), label='Fit')
plt.xlabel('Frequenz / Hz')
plt.ylabel('g(f)')
plt.title('Frequenzgang')
plt.legend(loc='best')
plt.savefig('Rauschen/Plot3.png')
```



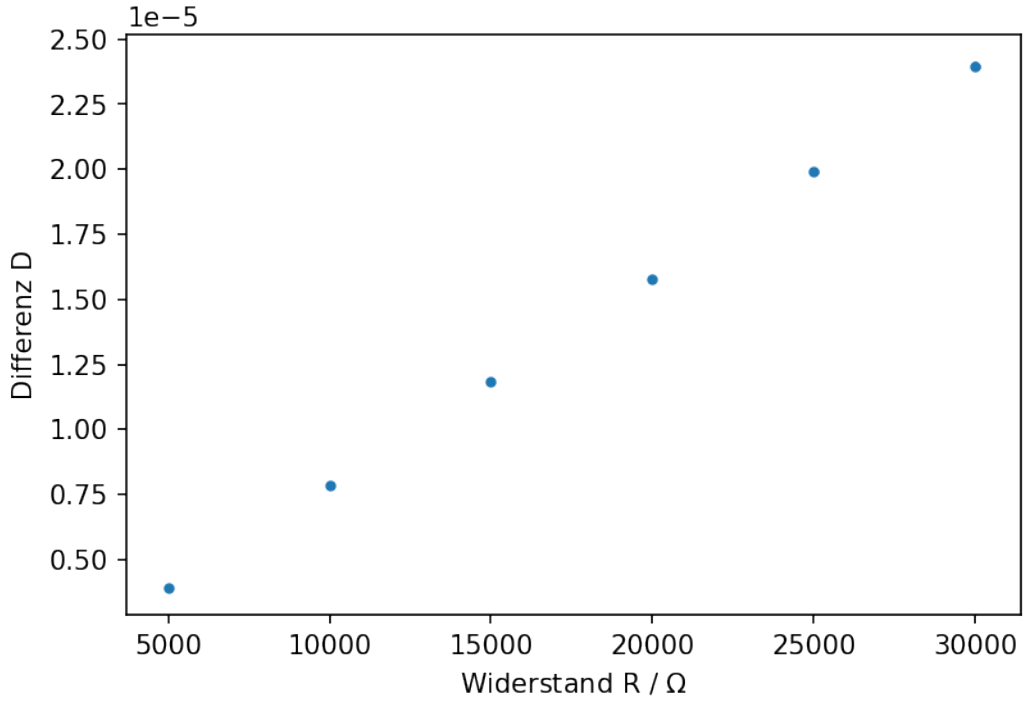
[11]:
```
B=integrate.quad(fit_func_square, f[a], f[-b], args=tuple(popt1))
fehler_B = B[0]* 0.02
print('Das Integral beträgt: {value:.4e}'.format(value=B[0]))
print(fehler_B/1e10)
```

```
Das Integral beträgt: 4.6066e+10
0.09213177297106033
```

Boltzmann konst.

[12]:
```
R=np.array([5e3 , 10e3 , 15e3 , 20e3 , 25e3 , 30e3])
fehler_R = R*0.005
U_aus=np.array([2.4088,3.1195,3.7003,4.2006,4.6674,5.084])*1e-3
U_aus_std = np.array([0.0091,0.013,0.0142,0.017,0.0164,0.0187])*1e-3
U_aus_messanzahl = np.array([113,133,102,110,137,102])
fehler_U_aus = U_aus_std
U_V=1.3688e-3
U_V_std = 0.00663e-3
U_V_messanzahl = 130
fehler_U_V = U_V_std
D=U_aus**2-U_V**2
fehler_D=np.sqrt((2*fehler_U_aus*U_aus)**2 + (2*fehler_U_V*U_V)**2)
```

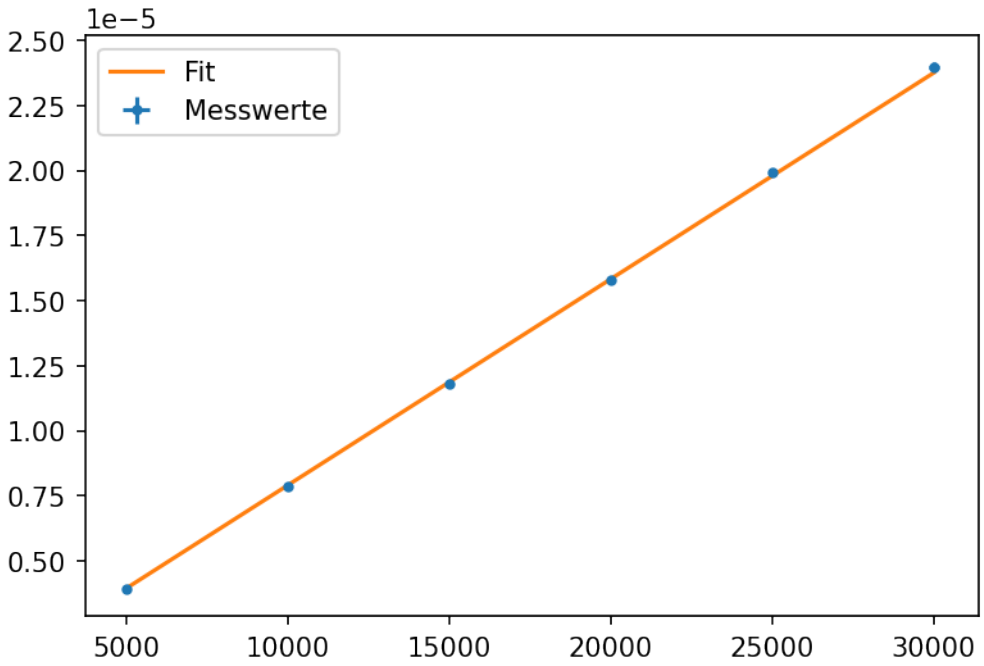
[13]:
```
plt.figure(dpi=150)
plt.errorbar(R, D, yerr=fehler_D, xerr = fehler_R, fmt='.')
plt.xlabel('Widerstand R / $\Omega$')
plt.ylabel('Differenz D')
plt.savefig('Rauschen/Plot4.png')
```



[14]:
```
popt2, pcov2 = curve_fit(linear,R, D, sigma = fehler_D)
print(f'c = {popt2[0]}, Standardfehler = {np.sqrt(pcov2[0][0])}')
```

```
c = 7.918737800337791e-10, Standardfehler = 2.3967753328807984e-12
```

[15]:
```
#einzeichnen der funktion
plt.figure(dpi = 150)
plt.errorbar(R, D, yerr=fehler_D, xerr = fehler_R, fmt='.',label = 'Messwerte')
plt.plot(R,linear(R,*popt2),label = 'Fit')
plt.legend()
plt.savefig('Rauschen/Plot5.png')
```



[16]:
```
#güte des fits
chisquare=np.sum(((linear(R,*popt2)-D)**2/fehler_D**2))
dof=5 #degrees of freedom
chisquare_red=chisquare/dof
print(chisquare)
print(chisquare_red)
```

```
3.321184564072167
0.6642369128144334
```

[17]:
```
prob=round(1-chi2.cdf(chisquare,dof),2)*100
print("Wahrscheinlichkeit="+str(prob)+"%")
```

```
Wahrscheinlichkeit=65.0%
```

[21]:
```
T = 20 + 273.15
fehler_T = 1
k = popt2[0]/(4*T*B[0])
fehler_k_syst = k * fehler_B/B[0]
fehler_k_stat = np.sqrt((np.sqrt(pcov2[0][0])/(4*T*B[0]))**2+(popt2[0]*fehler_T/
 ↪(4*T**2 *B[0]))**2)
print(k, fehler_k_syst, fehler_k_stat)
```

```
1.46597525684946e-23 2.9319505136989203e-25 6.685464158866831e-26
```

[19]:
```
def calcDiff(x, deltax, y, deltay):
    num = np.abs(x-y)
    denom = np.sqrt(deltax**2 + deltay**2)
    return num/denom
```

[20]:
```
print(calcDiff(k,fehler_k_syst + fehler_k_stat,c.k,0))
```

```
2.3698466772274296
```